Mécanique des solides

Equilibre d'un solide soumis à 2 forces

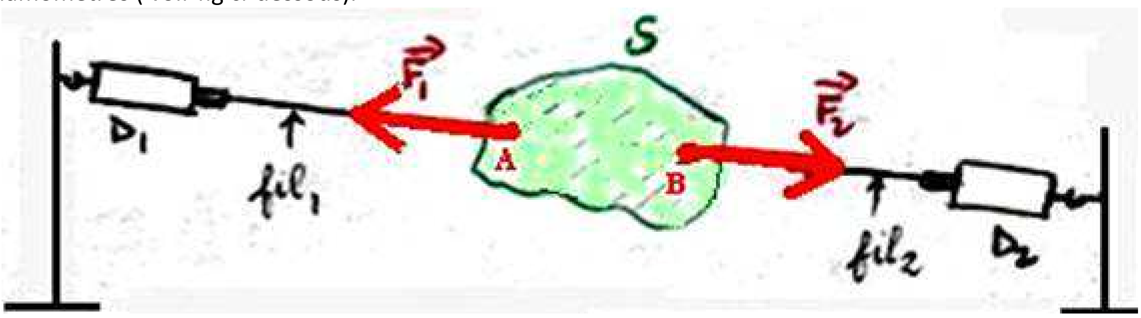
Auteur : Mme RASOLOARIMANA Vololoniarivo, professeur de sciences physiques au collège RASALAMA-Antananarivo

Remarque : les lettres en caractère gras dans le texte désignent des vecteurs : ainsi le vecteur force s'écrit **F.** Par contre à l'intérieur des formules, la notation vectorielle usuelle est conservée.

I-Relation entre les forces à l'équilibre :

Expérience :

Un solide S, de poids négligeable, est soumis aux actions simultanées de 2 fils tendus reliés à des dynamomètres (voir fig ci-dessous).



L'étude expérimentale montre que lorsque le solide est en équilibre ; les 2 forces $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$, respectivement localisées ponctuellement en A et B et exercées par les fils tendus, ont nécessairement :

- un même support (ou même droite d'action),
- des sens opposés,
- une même intensité, soit :

On a donc :

$$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$$

Ou

$$\boxed{\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}}$$

A retenir :

Lorsqu'un solide S soumis à 2 forces $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$ est en équilibre, nécessairement :

1- les forces $\mathbf{F_1}$, et $\mathbf{F_2}$ ont même support

2-La somme vectorielle des 2 forces est nulle, soit :

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$$

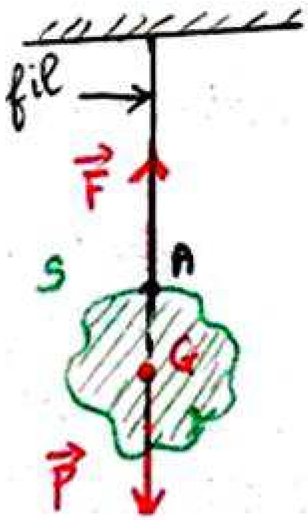
$$\vec{F_1} = -\vec{F_2} \Leftrightarrow F_1 = F_2 (\text{égalité des intensités})$$

Remarque : inversement si les 2 conditions précédentes sont réalisées pour un solide dans un référentiel donné cela ne signifie pas que le corps soit forcément en équilibre.

Le principe d'inertie (ou 1ère loi de Newton) stipule que si ces conditions sont réalisées, le centre d'inertie du solide est en mouvement rectiligne et uniforme dans ce référentiel. Le repos dans ce référentiel (et donc l'équilibre) n'étant qu'un cas particulier.

II/Exemples de solide en équilibre soumis à 2 forces

1) solide suspendu à l'extrémité d'un fil, poids d'un objet :



ce solide S est soumis à :
- l'action du fil exercée en un point A du solide, appelée **tension du fil** et notée **F**
- à la force de pesanteur ***répartie sur l'ensemble des points du solide***.

L'équilibre étant réalisé, d'après l'étude précédente, il existe nécessairement une force **P** appelé **poids de l'objet** ayant même support que **F** et de sens opposé telle que :

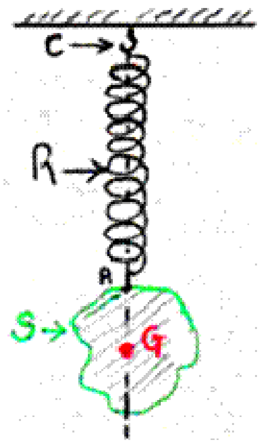
$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$$

Le poids, force répartie sur tout le corps est donc du point de vue de l'équilibre du corps , équivalent a une force unique appelée **poids du corps** notée **P**.

Rappel : Le poids **P** dépend de la masse m de l'objet et du champ de pesanteur **g** à l'endroit où il se trouve dans l'espace.
On a la relation :

$$\boxed{\vec{P} = m.\vec{g} \qquad \textit{unités}: P(N); m(kg); g(N.kg^{-1})}$$

2-solide accroché à un ressort,dynamomètre



Le dispositif est constitué de 3 parties : le corps S, le ressort R de masse supposée négligeable et le crochet C.

Analysons les forces appliquées au solide S ; celui-ci est soumis :
- aux forces de pesanteurs = poids **P** appliqué en G et de direction verticale
- à l'action de contact localisée en A, exercée par le ressort **T** $_{R\text{->}S}$:

A l'équilibre :

$$\overrightarrow{T}_{R\to S} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$$

- les 2 forces sont portées par la verticale contenant A et G

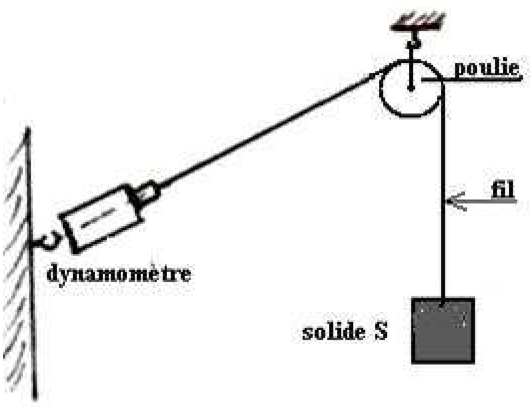
Cette condition ajoutée au principe d'interaction des forces s'exerçant au point A, permet d'écrire

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{T}_{R\to S} = -\overrightarrow{T}_{S\to R} \\ \overrightarrow{T}_{R\to S} = -\overrightarrow{P} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{T}_{S\to R} = \overrightarrow{P}$$

La force de liaison exercée par le solide sur le ressort est égale au poids du solide.
L'allongement du ressort utilisé étant proportionnel à la force exercée. Après étalonnage, ce dernier devient un dynamomètre.Ce dernier mesure ici le poids de l'objet

Remarques :

- Un fil tendu transmet intégralement une force.
- Lorsqu'un solide S est suspendu, par un fil de poids négligeable à un dynamomètre, le dynamomètre mesure de même coup le poids du solide S.
- Avec une poulie bien huilée, le dynamomètre indique encore l'intensité du poids de l'objet. Le système (fil tendu- poulie) permet de modifier l'orientation d'une force sans changer l'intensité.



Avec le montage ci-dessus, le dynamomètre mesure le poids de S (si la masse du fil et si les frottements de la poulie sont négligeables)

3-Solide sur un plan incliné

Considérons une surface plane et posons sur celle-ci un solide S. Le solide est soumis à deux forces : son poids**P,** force verticale et la réaction **R** du plan sur l'objet.
Lorsque le plan est horizontal, les deux forces se compensent et l'on a:

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

Inclinons légèrement le plan

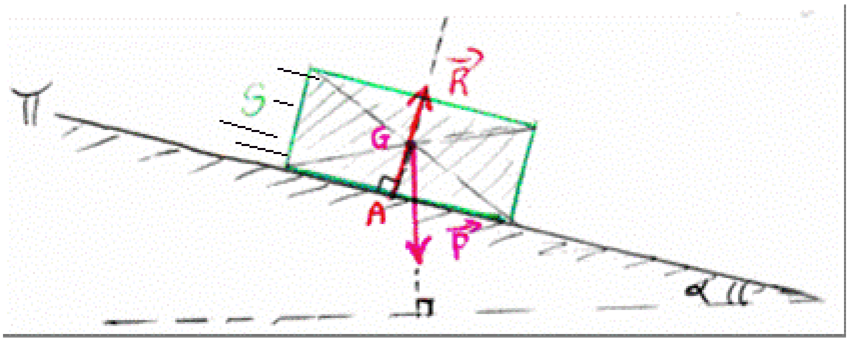
Envisageons 2 cas :

<u>1ère Cas :</u> Les surfaces en contact sont parfaitement polies et lubrifiées

Dans ce cas, la réaction **R** reste perpendiculaire au plan.

Les deux forces **P** et **R** ne se compensent plus car leur direction sont différentes.

S se met alors en mouvement accéléré sur ce plan.



<u>2ème Cas :</u> Les surfaces en contact ne sont plus polies :

Le solide reste au repos tant que l'angle d'inclinaison α du plan incliné par rapport à l'horizontale est inférieur à une valeur limite α_0.

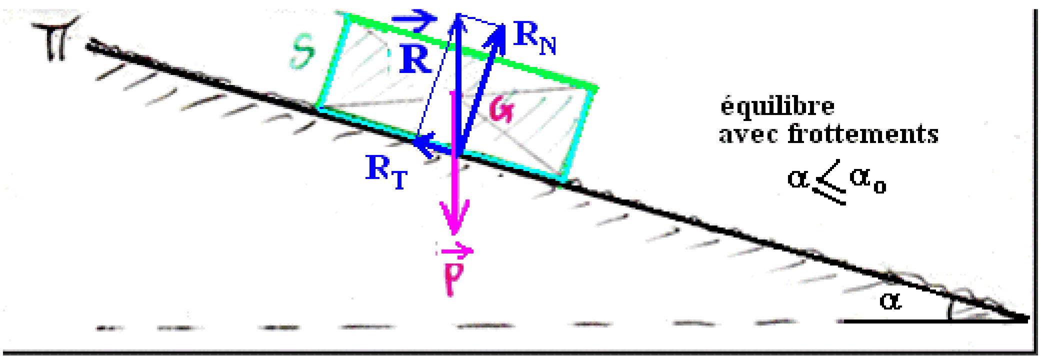
$$\boxed{\text{si } \alpha \leq \alpha_0}$$

le solide reste en équilibre, on a nécessairement:

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$$

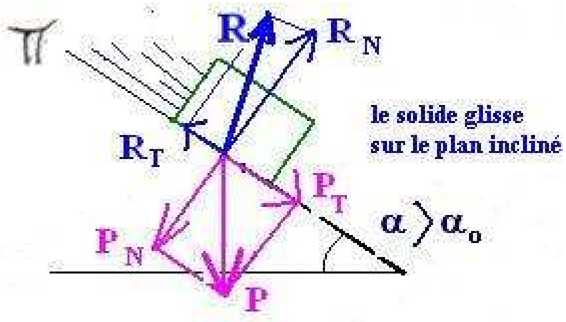
- **R** et **P** ont donc un même support vertical et ont des sens opposés (voir fig ci-dessous)

La réaction **R**, restant verticale, n'est plus perpendiculaire au plan incliné. Celle-ci admet une composante normale $\mathbf{R_N}$ et une autre tangente $\mathbf{R_T}$ au plan. Celle dernière s'oppose au glissement sur le plan incliné. Cette composante tangentielle $\mathbf{R_T}$ de la réaction **R** est la force de frottement exercée par le plan sur le solide.



$$\boxed{\text{si } \alpha > \alpha_0}$$

Le solide glisse. Les frottements se manifestent toujours, mais sont insuffisants pour empêcher le solide de glisser. La relation $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$ n'est plus vérifiée.
(voir figure ci-dessous).



Dans ce cas, comme le montre la figure ci dessus, l'intensité de la force de frottement $\mathbf{R_T}$ est inférieure à l'intensité de la composante tangentielle **PT** du poids. Le mouvement est accéléré.

L'angle α_0 , appelé **angle limite d'adhérence**, est caractéristique de la nature des matériaux en contact et de l'état des surfaces en contact .

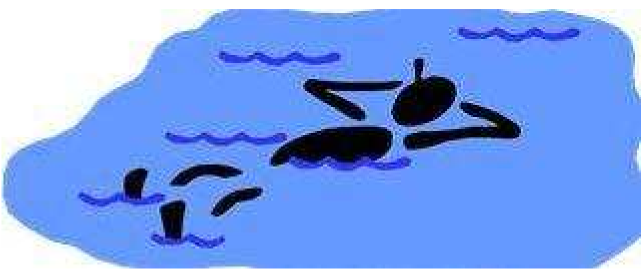
α_0 est d'autant plus grand que les surfaces soient rugueuses.

Pour une surface lubrifiée : $\alpha_0 \approx 0$.

S'ils sont parfois gênants, les frottements sont toutefois bien nécessaires !

En effet, ils sont indispensables à la vie quotidienne ; sans eux, il nous serait impossible de marcher, de rouler en voiture, de monter à une échelle
ou tout simplement de tenir un crayon !

4- Equilibre d'un corps flottant



a) Poussée d'Archimède

- **Enoncé du théorème d'Archimède : tout corps plongé dans un liquide (1) subit de la part de celui-ci une force verticale, dirigée vers le haut, d'intensité égale au poids du liquide déplacé**.
- Cette force est appelée **« Poussée d'Archimède »** que nous noterons **F**.
- C'est une force répartie sur toute la surface de la partie immergée .Elle est équivalente à une force unique appliquée au centre de gravité du liquide déplacé appelé : **centre de poussée C**

expression de l'intensité de cette force :

$$masse\ du\ liquide\ déplacé = \rho_{liquide} \times V_{ld}$$

$$F = poids\ de\ ce\ liquide\ déplacé = \rho_{liquide} \times V_{ld} \times g$$

la poussée d'Archimède s'exerce plus généralement lorsqu'un objet est plongé dans un fluide (liquide ou gaz). Un objet dans l'air est soumis à cette force mais elle reste généralement faible par rapport au poids sauf si l'objet est léger et volumineux (ballon).

b) Equilibre d'un corps flottant

Lorsqu' un solide flotte sur un liquide, il se trouve en équilibre sous l'action de son poids **P** et de la poussée d'Archimède **F** qu'il subit

Un corps flottant est donc en équilibre soumis à 2 forces :

$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$; $\vec{P} = -\vec{F}$ et $P = F$

Notations :

V_S : volume du solide S ; ρ_ℓ : masse volumique du liquide

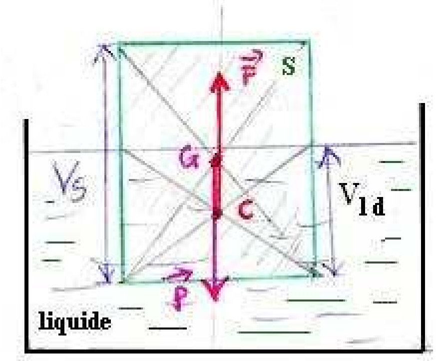
V_{ld} : volume du liquide déplacé; ρ_S : masse volumique du solide S

Le solide flotte dans le liquide, par conséquent :

$$F = P$$

$$\rho_\ell \cdot V_{\ell d} \cdot g = \rho_S \cdot V_S \cdot g$$

$$\rho_\ell \cdot V_{\ell d} = \rho_S \cdot V_S$$

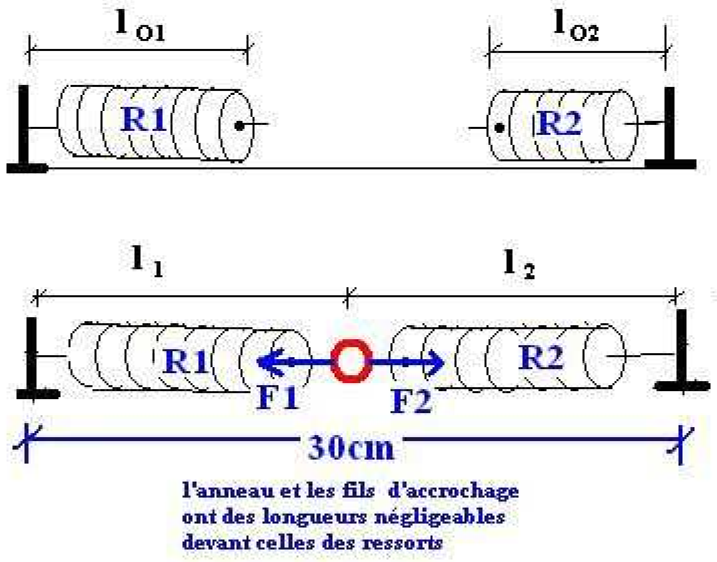


5- Exercices d'application avec corrigé

1ère Application : **équilibre de deux ressorts accrochés par un anneau :**

On dispose de 2 ressorts . Le ressort (R_1) a une longueur à vide l_{O1} de 10 cm et s'allonge de 1cm pour une force appliquée de 1N.

Le ressort (R_2) a une longueur à vide l_{O2}=15cm et s'allonge de 3cm pour une force appliquée de 1N.



On les réunit à un anneau de poids et de dimensions négligeables. Les 2 autres extrémités des ressorts sont fixées à 2 crochets distants de 30cm. Soient l_1 et l_2 les longueurs respectives des ressorts (R1) et (R2).
Calculer la longueur de chaque ressort l1 et l2 et les forces de tension F_1 et F_2 des ressorts.

Correction

Calculons d'abord les raideurs k_1 et k_2:
Ecrivons que la force est proportionnelle à l'allongement (ressort dans le domaine élastique)
Ressort (R1)

$$F = k_1\,\delta \text{ avec } \delta = 1cm \Rightarrow k_1 = \frac{F}{\delta} = \frac{1N}{10^{-2}m} = 100\ N/m$$

Ressort (R2)

$$F = k_2\ \delta' \text{ avec } \delta' = 3cm \Rightarrow k_2 = \frac{F}{\delta'} = \frac{1N}{3.10^{-2}m} = \frac{100}{3} N/m$$

Ecrivons que l'anneau est en équilibre sous l'action de F_1 et de F_2

F_1= tension du ressort R_1 dont l'intensité est

$$F_1 = k_1\,\delta_1 = k_1\left(\ell_1 - \ell_{o_1}\right)$$

F_2= : tension du ressort R_2 dont l'intensité

$$F_2 = k_2\,\delta_2 = k_2\left(\ell_2 - \ell_{o_2}\right)$$

ℓ_{o1} = longueur à vide de (R_1) ; d1 =allongement

ℓ_{o_2} = longueur à vide de (R_2) ; d2 =allongement

Notre objectif est de trouver ℓ_1 et ℓ_2 **longueurs des ressorts à l'équilibre de l'anneau et les efforts dans les ressorts** F_1 et F_2.

L'équilibre étant réalisé:

$$\overline{F_1} + \overline{F_2} = \overline{0} \Rightarrow \overline{F_1} = -\overline{F_2} \quad et \quad F_1 = F_2$$

Comme :

$$F_1 = F_2$$

$$k_1\,\delta_1 = k_2\,\delta_2$$

$$k_1\left(\ell_1 - \ell_{o_1}\right) = k_2\left(\ell_2 - \ell_{o_2}\right)$$

$$k_1\,\ell_1 - k_1\,\ell_{o_1} = k_2\,\ell_2 - k_2\,\ell_{o_2}$$

$$k_1\,\ell_1 - k_2\,\ell_2 = k_1\,\ell_{o_1} - k_2\,\ell_{o_2}$$

$$l_{o1} = 10cm = 0{,}10m$$

$$l_{o2} = 15cm = 0.15m$$

$$100\ell_1 - \frac{100}{3}\ell_2 = (100 \cdot 0{,}1) - \left(\frac{100}{3} \cdot 0{,}15\right)$$

$$100\ell_1 - \frac{100}{3}\ell_2 = 10 - 5 = 5$$

On connaît d'autre part la longueur totale des 2 ressorts allongés (30cm)

On en déduit le système de 2 équations

$$\begin{cases} 100\ell_1 - \dfrac{100}{3}\ell_2 = 5 \\ \ell_1 + \ell_2 = 0{,}3 \end{cases}$$

Résolution du système…..

C'est un système de 2 équations à 2 inconnues.

Utilisons la méthode dite « d'addition » ou de « soustraction ».
Après avoir multiplié la deuxième par 100, soustrayons les deux équations :

$$\begin{cases} 100\ell_1 - \dfrac{100}{3}\ell_2 = 5 \\ 100\ell_1 + 100\ell_2 = 30 \end{cases}$$
$$\overline{\quad - \dfrac{400}{3}\ell_2 = 25 \quad} \qquad \Rightarrow \quad \ell_2 = 0{,}1875\,m$$

$$\ell_2 = 18{,}75\,cm$$

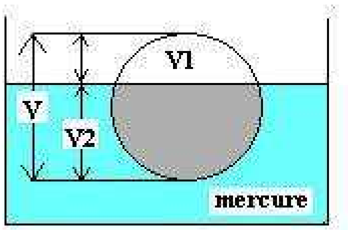
$$\boxed{\ell_1 + \ell_2 = 30\,\text{cm} \qquad \text{et} \qquad \ell_1 = 11{,}25\,\text{cm}}$$

Calcul des forces :

$$F_1 = k_1\,(\ell_1 - \ell_0) = 100\,(11{,}25 - 10)\cdot 10^{-2}$$

$$\boxed{F_1 = 1{,}25\text{N} = F_2}$$

2ème Application :
Une boule en fer de densité 7,25 est introduite dans du mercure de densité 13,6.
On demande
1-De montrer que la boule est partiellement immergée dans le liquide.
2-De calculer le rapport du volume émergé V_1 au volume total V de la boule.



Quelques rappels avant de commencer !

Définition de la masse volumique :

La masse volumique caractérise une matière et non pas un objet particulier. Prélevons un échantillon quelconque de cette matière .La masse volumique est le rapport de sa masse sur le volume de l'échantillon.L'unité utilisé est le Kg/m3

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\text{unités : } \begin{cases} m \ (\text{en kg}) \\ V \ (\text{en } m^3) \\ \rho \ (\text{en kg} \cdot m^{-3}) \end{cases}$$

Le volume d’un objet dépend de sa température . La masse volumique dépend donc de la température (et de la pression pour un gaz !)

…et de la densité :

La densité d’une matière est le rapport des masses d’un échantillon de cette matière sur la masse du **même volume** d’eau considérés dans les mêmes conditions de température et de pression.

Considérons un objet en fer de volume V soit m_{fer} sa masse et m_{eau} la masse du même volume d’eau ,

$$d_{fer/eau} = \frac{m_{fer}}{m_{eau}} = \frac{m_{fer}/V}{m_{eau}/V} = \frac{\rho_{fer}}{\rho_{eau}}$$

La densité est donc aussi égale au rapport des masses volumiques du fer et de l’eau .Elle s’exprime par un nombre sans unité.

Exemple: La masse volumique de l'eau est 1000 Kg/m3

la masse volumique du pétrole est 800 Kg/m3

Densité du pétrole/eau =800/1000= 0.8 ; Densité de l'eau=1000/1000= 1

Correction

Le solide à étudier est la **boule** ; c’est un corps flottant. A l’équilibre ; la boule est soumise à 2 forces : son poids **P** et la poussée d’Archimède **F** (exercée par le mercure).

On note :
V = volume de la boule
V1= volume émergé
r : masse volumique de la boule
$\mathbf{r}_{\mathbf{Hg}}$ masse volumique du mercure
V2 volume immergé
m= masse de la boule
$\mathbf{m}_{\mathbf{Hg}}$ masse de mercure déplacé
g= intensité de pesanteur

1-Supposons l’objet en fer complètement immergé.
Comparons le poids P de l’objet et la poussée d’Archimède F
$P=r.V.g$ et $F=r_{Hg}.V.g$

Comme r $_{Hg}$> r, on a F>P et l'équilibre est impossible.
Pour que l'équilibre s'établisse, il faut que F diminue et donc que le volume immergé V diminue. L'objet est donc partiellement immergé.

2-Le corps étant en équilibre, on a nécessairement :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{O} \Leftrightarrow \vec{P} = -\vec{F} \quad \text{et} \quad P = F$$

$$P = F$$

$$m\,g = m_{Hg} \cdot g$$

$$\rho \cdot V \cdot g = \rho_{Hg} \cdot V_2 \cdot g$$

$$\rho \cdot V = \rho_{Hg} \cdot V_2$$

$$V = V_1 + V_2 \Rightarrow V_2 = V - V_1$$

$$\rho \cdot V = \rho_{Hg} \cdot (V - V_1)$$

$$\rho \cdot V = \rho_{Hg} V - \rho_{Hg} \cdot V_1$$

$$(\rho - \rho_{Hg}) V = -\rho_{Hg} V_1$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{\rho - \rho_{Hg}}{-\rho_{Hg}} = \frac{\frac{\rho}{\rho_{eau}} - \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{eau}}}{-\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{eau}}} = \frac{d - d_{Hg}}{-d_{Hg}}$$

$$\boxed{\frac{V_1}{V} = \frac{d_{Hg} - d}{d_{Hg}}}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{13{,}7 - 7{,}25}{13{,}7} = 0{,}4635$$